Benne de Weger

Als er één a over de dam is…

Voor de liefhebbers van getaltheorie: hoe het ogenschijnlijke toeval in een niet-kloppende berekening met het juiste antwoord via 'hogere' wiskunde helemaal geen toeval blijkt te zijn.

Hoe een fout tot iets goeds kan leiden

Het vereenvoudigen van de breuk $\frac{16}{64}$ kan, merkwaardigerwijze, door deze op een foute manier te lezen als $\frac{1\times 6}{6\times 4}$ en dan de zessen weg te strepen:

$$\frac{16}{64}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$$

met het juiste antwoord als resultaat. Verrassend? Ja, natuurlijk, een fout argument dat naar het goede antwoord leidt zonder dat er een 'dubbele fout' is gemaakt, komt (gelukkig) niet vaak voor. In zekere zin is dit verschijnsel toeval. Als je dit grappig vindt, lees vooral verder: het wordt nog veel grappiger, en we gaan verklaringen zoeken. Niet omdat we iedere grap willen uitleggen en daarmee doodmaken, maar omdat er wel degelijk patronen te vinden zijn, en in de uitleg zit nu juist de échte grap.

Eerst een notatie: het getal dat ontstaat door a en b 'aan elkaar te plakken' noteren we als $a|b$. Dus met $a = 6$ en $b = 4$ krijgen we $a|b = 64$, met $a = 21$ en $b = 7$ krijgen we $a|b = 217$, met $a = 36$ en $b = 81$ krijgen we $a|b = 3681$. Precies gezegd: voor positieve gehele getallen a, b (nou, vooruit, b mag ook 0 zijn), waarbij we het aantal cijfers van b nu k noemen, definiëren we $a|b = 10^k a + b$. Het aantal cijfers van b kunnen we kunstmatig verhogen met 'voorloopnullen': we zeggen doorgaans dat $b = 3$ één cijfer heeft ($k = 1$), maar als we dat nodig vinden kunnen we datzelfde getal $b = 3$ ook als $b = 0003$ schrijven, en dan heeft het plotseling $k = 4$ cijfers. Met deze notatie kunnen we nu precies zeggen wat we willen: zoek getallen x en z waarvoor er een a bestaat zodat

$$\frac{x|a}{a|z}=\frac{x}{z}.$$

Een kleine zoektocht naar meer voorbeelden van $\frac{x|a}{a|z}=\frac{x}{z}$ in getallen a, x, z van één enkel cijfer (dus $a, x, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; je kunt zelf bedenken waarom 0 hier niet erg zinvol is) levert nog drie voorbeelden op:

$$\frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}\qquad \frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5}\qquad \frac{49}{98}=\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}$$

Met wat grotere x, z, maar a nog steeds één cijfer, gebeurt het ook, bijvoorbeeld:

$$\frac{217}{775}=\frac{21\cancel{7}}{\cancel{7}75}=\frac{21}{75}$$

En het kan zelfs met a-tjes met meer cijfers:

$$\frac{3681}{8180}=\frac{36\cancel{81}}{\cancel{81}80}=\frac{36}{80}$$

De voorbeelden met eencijferige x, a, z zie je hier en daar in de literatuur[1] opduiken, met name ons eerste voorbeeld van $\frac{16}{64}$ lijkt wel redelijk bekend te zijn. Minder bekend, maar ook in de literatuur[2] te vinden, is dat je zo'n voorbeeld onmiddellijk kunt uitbreiden. Kijk maar:

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{16}{64},$$

maar ook:

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{16}{64}=\frac{16\cancel{6}}{\cancel{6}64}=\frac{166}{664},$$

en

$$\frac{1}{4}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{16}{64}=\frac{16\cancel{6}}{\cancel{6}64}=\frac{166}{664}=\frac{166\cancel{6}}{\cancel{6}664}=\frac{1666}{6664}=\ldots,$$

enzovoorts, het lijkt iedere keer weer te kloppen. Is dit echt zo? Kun je zoveel zessen als je maar wilt toevoegen achteraan de teller en (evenveel natuurlijk) vooraan de noemer? Is het ook bij de andere voorbeelden van hierboven zo? Het lijkt er wel op:

$$\frac{1}{5}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{19}{95}=\frac{19\cancel{9}}{\cancel{9}95}=\frac{199}{995}=\frac{199\cancel{9}}{\cancel{9}995}=\frac{1999}{9995}=\ldots,$$

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{26}{65}=\frac{26\cancel{6}}{\cancel{6}65}=\frac{266}{665}=\frac{266\cancel{6}}{\cancel{6}665}=\frac{2666}{6665}=\ldots,$$

$$\frac{4}{8}=\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{49}{98}=\frac{49\cancel{9}}{\cancel{9}98}=\frac{499}{998}=\frac{499\cancel{9}}{\cancel{9}998}=\frac{4999}{9998}=\cdots,$$

$$\frac{21}{75}=\frac{21\cancel{7}}{\cancel{7}75}=\frac{217}{775}=\frac{217\cancel{7}}{\cancel{7}775}=\frac{2177}{7775}=\frac{2177\cancel{7}}{\cancel{7}7775}=\frac{21777}{77775}=\cdots,$$

$$\frac{36}{80}=\frac{36\cancel{81}}{\cancel{81}80}=\frac{3681}{8180}=\frac{3681\cancel{81}}{\cancel{81}8180}=\frac{368181}{818180}=\frac{368181\cancel{81}}{\cancel{81}818180}=\frac{36818181}{81818180}=\cdots$$

het is allemaal waar (reken maar na), en lijkt telkens ook verder uit te breiden te zijn.

Een leuke alternatieve manier om deze voorbeelden op te schrijven illustreren we aan ons eerste voorbeeld:

$$\frac{1}{4}=\frac{16}{64}=\frac{166}{664}=\frac{1666}{6664}=\frac{16666}{66664}=\frac{166666}{666664}$$

166666 x 4 = 1 x 666664, 16666 x 64 = 16 x 66664, 1666 x 664 = 166 x 6664,
waarbij het maalteken op de juiste 'symmetrische' manier opschuift. Precies even leuk is:

$$\frac{166666}{1}=\frac{666664}{4},\quad \frac{16666}{16}=\frac{66664}{64},\quad \frac{1666}{166}=\frac{6664}{664}.$$

Verschillende termen worden gebruikt om dit soort merkwaardige verschijnselen aan te duiden: 'illegal cancellations' [3], 'amusing cancelling' [4], 'freak arithmetic cancellations' [5], en 'weird fractions' [6]. In het Nederlands zou je het 'Miskunde' kunnen noemen.

Een hyperbool

Wat zit hierachter? Want dat moet haast wel, dat er iets achter zit. En waarom werkt het bij sommige getallen wel, maar bij andere niet? Bijvoorbeeld, $\frac{13}{32}$ is zeker niet gelijk aan $\frac{1}{2}$.

En we kunnen het allemaal nog een slagje algemener doen. Het is natuurlijk zo dat dit verschijnsel sterk afhangt van het feit dat we het tientallig stelsel gebruiken. In het negentallig stelsel bijvoorbeeld moeten we 16 schrijven als 17 (want 1 x 9+7) en 64 als 71 (want 7 x 9+1), en dat gaat dus goed fout:

$$\frac{17}{71}\neq\frac{1\cancel{7}}{\cancel{7}1}=\frac{1}{1}$$

en het gaat ook fout als we 16 en 64 negentallig lezen, want negentallig is

$$\frac{16}{64}\neq\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$$

want negentallig $\frac{16}{64}$ is tientallig $\frac{15}{58}$, en $\frac{15}{58}\neq\frac{1}{4}$.
Maar negentallig gaat het ergens anders weer goed:

$$\frac{14}{43}\neq\frac{1\cancel{4}}{\cancel{4}3}=\frac{1}{3}$$

(let wel: 14 betekent hier 1 x 9 + 4 = 13 en 43 is 4 x 9 + 3 = 39, dus het klopt wel degelijk).

Laten we wat algemener dan in het tientallig stelsel werken, laten we zeggen, in het b-tallig stelsel, met $b \geq 2$. De letter b staat hier voor 'basisgetal'. De 'cijfers' in het b-tallig stelsel zijn dus 0, 1, 2, ..., $(b-2)$, $(b-1)$, en als we bijvoorbeeld 345 opschrijven dan bedoelen we $3b^2+4b+5$ (als tenminste $b \geq 6$, want anders heeft 345 geen betekenis omdat het cijfer 5 al niet meer voorkomt als $b \leq 5$). Wat betekent het nu precies dat

$$\frac{x|a}{a|z}=\frac{x}{z}\,?$$

Hierbij laten we toe dat x en z ook b of groter zijn, maar de a moet echt een 'cijfer' zijn, dus $0 \leq a \leq b-1$. Met die laatste eis verliezen we niets: het voorbeeld

$$\frac{3681}{8180}=\frac{36\cancel{81}}{\cancel{81}80}=\frac{36}{80}$$

van hierboven lezen we als geschreven in het honderdtallig stelsel, met $b = 100$, en de 'cijfers' [00], [01], [02], ..., [98], [99], dus

$$\frac{[36][81]}{[81][80]}=\frac{[36]\cancel{[81]}}{\cancel{[81]}[80]}=\frac{[36]}{[80]},$$

en zo past dit voorbeeld dus toch binnen onze conditie dat a maar één 'cijfer' heeft.

Als we het aantal 'cijfers' van z nu k noemen, dan wordt onze vergelijking $\frac{x|a}{a|z}=\frac{x}{z}$:

$$\frac{xb+a}{ab^k+z}=\frac{x}{z}.$$

Nou vinden we die k in de noemer een beetje lastig, en die gaan we wegwerken door in plaats van z altijd te gaan kijken naar $\frac{z}{b^{k-1}}$; dat getal noemen we dan maar y, en die ligt altijd tussen 1 en b. De vergelijking hierboven wordt dan, met $z=yb^{k-1}$,

$$\frac{xb+a}{ab^k+yb^{k-1}}=\frac{x}{yb^{k-1}},$$

en nu kunnen we aan beide zijden de noemers door b^{k-1} delen, en dan wordt het:

$$\frac{xb+a}{ab+y}=\frac{x}{y}.$$

Dat heeft het grote voordeel dat de k er niet meer direct inzit. Een voorbeeldje: in plaats van $\frac{1}{4}=\frac{16}{64}=\frac{166}{664}$ schrijven we nu voor de eerste stap nog steeds $\frac{1}{4}=\frac{16}{64}$, maar voor de volgende stappen $\frac{16}{6{,}4}=\frac{166}{66{,}4}$, $\frac{166}{6{,}64}=\frac{1666}{66{,}64}$, enz.

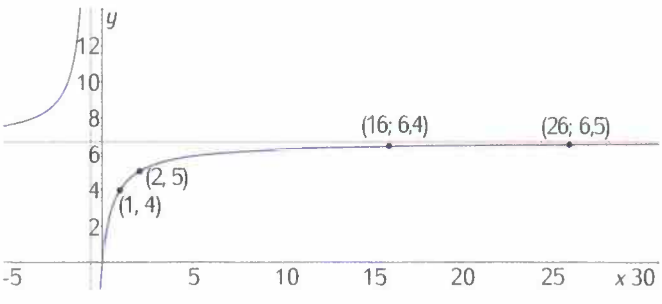
In de vergelijking die we nu te pakken hebben, gaan we de noemers uitvermenigvuldigen:
$bxy + ay = abx + xy$
oftewel
$(b-1)xy + ay - abx = 0$.

Voor vaste a en b en variabele x en y staat hier de vergelijking van een hyperbool. We zouden het als de grafiek van een functie kunnen zien door y er uit op te lossen:

$$y=\frac{abx}{(b-1)x-a},$$

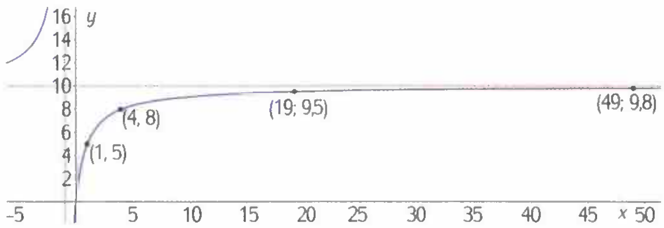
die niet bestaat als de noemer 0 wordt, dus als $x=-\frac{a}{b-1}$
Bij deze waarde van x is er dan een verticale asymptoot. Ook zien we, door x naar ∞ of naar $-\infty$ te laten fietsen, dat er een horizontale asymptoot te vinden is bij $y=\frac{ab}{b-1}$

We tekenen maar eens een plaatje voor $a = 6$ en $b = 10$, dus van $y=\frac{60x}{9x+6}=\frac{20x}{3x+2}$
met de asymptoten $x=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$ en $y=\frac{60}{9}=6\frac{2}{3}$
zie figuur 1.



figuur 1 De hyperbool $y = 20x / (3x + 2)$

Dat we hierboven met $a = 6$ en $b = 10$ de twee voorbeelden $(x, y) = (1, 4)$ en $(x, y) = (2, 5)$ hadden, betekent nu dat deze twee punten precies op deze hyperbool liggen, vandaar dat we ze hebben ingetekend.
Maar we hebben gezien dat één voorbeeld meteen tot meer leidt: naast $(x, y) = (1, 4)$ moet ook $(x, y) = (16; 6{,}4)$, $(166; 6{,}64)$, ... op dezelfde hyperbool liggen, en vanwege $(x, y) = (2, 5)$ evenzo $(x, y) = (26; 6{,}5)$, $(266; 6{,}65)$, ...
Deze punten intekenen houdt gauw op.
Voor $b = 10$ is er nog een tweede waarde van a waarvoor we voorbeelden zagen met allemaal getallen van één cijfer, namelijk $a = 9$. Dat geeft een tweede hyperbool, met als functie $y=\frac{90x}{9x+9}=\frac{10x}{x+1}$
met daarop de punten $(x, y) = (1, 5)$, $(19; 9{,}5)$, $(9{,}95)$, ... en $(x, y) = (4, 8)$, $(49; 9{,}8)$, $(499; 9{,}98)$, ... en asymptoten $x = -\frac{9}{9} = -1$ en $y = \frac{90}{9} = 10$, zie figuur 2.



figuur 2 De hyperbool $y = 10x / (x + 1)$

De echte grap

Een handige truc om hyperbolen in de vingers te krijgen is om de beide asymptoten naar de assen te verschuiven, door nieuwe variabelen u, v te kiezen, als volgt:
$u = x + \frac{a}{b-1}$, $v = y \; \frac{ab}{b-1}$.
De vergelijking $(b-1)xy + ay - abx = 0$ gaat dan over in:

$$(b-1)\left(u-\frac{a}{b-1}\right)\left(v+\frac{ab}{b-1}\right)+a\left(v+\frac{ab}{b-1}\right)-ab\left(u-\frac{a}{b-1}\right)=0\,.$$

We werken de haakjes uit en zien dat er een hoop wegvalt:

$$(b-1)uv + \frac{a^2b}{b-1} = 0,$$

dus we houden iets heel simpels over in de variabelen u, v:

$$uv=-\frac{a^2b}{(b-1)^2}\,.$$

Nu blijkt het handig om u een beetje te schalen:

$$u=\frac{ab}{b-1}t,$$

zodat de hyperbool-uitdrukking ons voor v geeft:

$$v=-\frac{a}{b-1}\cdot\frac{1}{t},$$

oftewel, we vinden een 'parametrisatie' van de hyperbool:

$$(x,y)=\frac{a(bt-1)}{b-1}\cdot\left(1,\frac{1}{t}\right).$$

Voor de parameter t geldt dat $t = \frac{x}{y}$, de 'schaling' van u en v was hierop afgestemd.
Dat betekent, dat als t de reële getallen doorloopt (behalve de 0), dan doorloopt (x, y) precies de hyperbool.

Bovendien geldt: als t rationaal (een breuk) is, dan zijn x en y dat ook, en bovendien ook andersom: als x, y beide rationale getallen zijn, dan is t dat ook.

Veronderstel nu dat we getallen x_0, z_0 hebben die een oplossing zijn van ons oorspronkelijke probleem, dus $\frac{x_0|a}{a|z_0}$ met $a < b$. Dan nemen we, $y_0 = \frac{z_0}{b^{k-1}}$

en dan ligt (x_0, y_0) op de hyperbool $(b - 1)$

$xy + ay - abx = 0$. Voor $u_0 = x_0 + \frac{a}{b-1}$, $v_0 = y_0 - \frac{ab}{b-1}$

geldt dan $u_0 v_0 = -\frac{a^2 b}{(b-1)^2}$ en we nemen t_0 zodat

$u_0 = \frac{ab}{b-1} t_0$ en $v_0 = -\frac{-a}{b-1} \cdot \frac{1}{t_0}$.

Nu komt de echte grap. Vermenigvuldig deze t_0 met b, en noem het resultaat t_1, dus $t_1 = bt_0$. We rekenen terug:

$u_1 = \frac{ab}{b-1} t_1$, en $v_1 = -\frac{a}{b-1} \cdot \frac{1}{t_1}$, zodat weer $u_1 v_1 = -\frac{a^2 b}{(b-1)^2}$,

en dus met $x_1 = u_1 - \frac{a}{b-1}$, $y_1 = v_1 + \frac{ab}{b-1}$ vinden we een punt (x_1, y_1) dat op dezelfde hyperbool

$(b - 1)xy + ay - abx = 0$ ligt. Laten we nu eens gaan kijken hoe (x_1, y_1) zich verhoudt tot (x_0, y_0). We hebben:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{a(bt_0 - 1)}{b-1} \\
x_1 &= \frac{a(bt_1 - 1)}{b-1} \\
&= \frac{a(b^2 t_0 - 1)}{b-1} \\
&= \frac{a(b^2 t_0 - b + b - 1)}{b-1} \\
&= \frac{a(b^2 t_0 - b)}{b-1} + \frac{a(b-1)}{b-1} \\
&= b\frac{a(bt_0 - 1)}{b-1} + a \\
&= bx_0 + a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{a(bt_0 - 1)}{b-1} \cdot \frac{1}{t_0} \\
y_1 &= \frac{a(bt_1 - 1)}{b-1} \cdot \frac{1}{t_1} \\
&= \frac{a(b^2 t_0 - 1)}{b-1} \cdot \frac{1}{bt_0} \\
&= \frac{a(b^2 t_0 - bt_0 + bt_0 - 1)}{b(b-1)t_0} \\
&= \frac{a(b^2 t_0 - bt_0)}{b(b-1)t_0} + \frac{a(bt_0 - 1)}{b(b-1)t_0} \\
&= a + \frac{1}{b} \cdot \frac{a(bt_0 - 1)}{(b-1)t_0} \\
&= a + \frac{1}{b} \cdot y_0
\end{aligned}
$$

Onze eerste conclusie is dat $x_1 = bx_0 + a = x_0|a$.

Hoera, dat is precies wat we wilden. Voor z_1 ligt het net wat subtieler. We moeten terugrekenen van y naar z, maar let op, voor y_0 en z_0 geldt weliswaar $z_0 = y_0 b^{k-1}$, waarbij k het aantal cijfers van z_0 is, maar voor de y_1 die we nu gevonden hebben gaat

$$y_1 b^{k-1} = (a + \frac{1}{b} y_0) b^{k\;1} = a + \frac{1}{b} z_0$$

geen geheel getal zijn; er is een noemer b die niet zomaar wegvalt. Maar er is natuurlijk geen reden te veronderstellen dat z_1 ook k cijfers gaat hebben, net als z_0. We zien hier dat de gevonden y_1 aanleiding geeft tot $k + 1$ cijfers voor z_1, want dan is $z_1 = y_1 b^k = ab^k + b^{k-1} y_0 = ab^k + z_0$, en dat is wel netjes geheel. Dat geeft dan $z_1 = ab^k + z_0 = a|z_0$ en dat is gelukkig ook precies wat we wilden.

Hiermee is aangetoond dat, voor gegeven a; b met $a < b$, een oplossing (x, z) van $\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$ in het b-tallig stelsel leidt tot een punt (x, y) op de hyperbool $(b - 1)$ $xy + ay - abx = 0$; dan blijkt $(x|a, a|z)$ op zijn beurt ook weer tot een punt op die hyperbool te leiden, waardoor het een oplossing is van $\frac{x|a|a}{a|a|z} = \frac{x|a}{a|z}$; en dus leidt een oplossing (x, z) van $\frac{x|a}{a|z} = \frac{x}{z}$ in het b-tallig stelsel tot een oneindige rij oplossingen $\frac{x|a|a|\cdots|a|a}{a|a|\cdots|a|a|z} = x/z$.

De al eerder genoemde artikelen[1], [6] bevatten ook bewijzen, waar de hyperbolen echter niet in uitgelicht worden.

Inderdaad, als er één a over de dam is, dan volgt er nog één, en nog één, en...

Op de *Euclides*-website staat een vervolg van dit artikel waarin met behulp van lineaire afbeeldingen een vereenvoudiging van het uitbreidingsproces wordt gevonden, en een manier wordt beschreven om systematisch en efficiënt voorbeelden te vinden.

vakbladeuclides.nl/994aoverdedam

Noten

[1] Jones, B.W. (1995). *The Theory of Numbers*. Rinehart & Co., paragraaf 3.6.

[2] Boas, R.P. (1979). Anomalous Cancellation. In Ross Honsberger (Red)., *Mathematical Plums*. (hoofdstuk 6). Mathematical Association of America.

[3] Trigg, C.W. (1961). Solution of Problem 434, *Mathematics Magazine*, 34, 367–368.

[4] Domoryad, A.P. (1963). *Mathematical Games and Pastimes*. Pergamon Press, hoofstuk 6.

[5] Carman, R.A. (1971). Mathematical Misteaks. *The Mathematics Teacher*, 64, 109–115.

[6] Fried, M.N. & Mayer Goldberg (2010). A Pumping Lemma for Invalid Reductions of Fractions. *College Mathematics Journal*, 41(5), 357–364.

Over de auteur

Benne de Weger is universitair hoofddocent bij de Technische Universiteit Eindhoven, en is geïnteresseerd in getaltheorie en cryptologie.
E-mailadres: *b.m.m.d.weger@tue.nl*

Roest rust (niet)

Ab van der Roest

Plaatsnamen

Hardlopen is mijn grote hobby en af en toe loop ik een marathon. Zo kwam ik in Zeeuws-Vlaanderen terecht voor de marathon Terneuzen-Hulst. Een eind rijden vanuit Veenendaal voor een marathon en daarom knoopten we er een paar dagen aan vast. Dat betekent de omgeving verkennen op de kaart en in 'real life'. En dan kom je opeens terecht in Nummer Een.

Een uitdagende naam voor een wiskundeleraar in ruste. We hebben getallen die gevormd worden door cijfers en we hebben nummers, meestal gerepresenteerd met een getal. We hebben natuurlijk maar tien cijfers en oneindig veel getallen. Het aantal nummers is afhankelijk waar we het over hebben: in de Top2000 hebben we 2000 nummers. In een voetbalelftal met bijvoorbeeld vijf reserves zouden we kunnen volstaan met 16 nummers. Maar wie durft er met nummer 14 te spelen, want dat nummer is toch helemaal gekoppeld aan Johan Cruijf. Nummer Een, daar kwam ik terecht. Zal er ook een Nummer Twee bestaan? Voor zover ik kon nagaan